Voorwoord

Met uitzondering van Hoofdstuk 3 zijn deze cursusnota's grotendeels gebaseerd op de cursus "Discrete Wiskunde" die jaren geleden opgesteld werd door Prof. F. De Clerck. Het hoofdstuk over probabiliteit is gebaseerd op nota's van Prof. H. De Meyer. De huidige cursus is tot stand gekomen na herwerking van deze nota's door Prof. T. De Medts (vorige lesgever) en mezelf.

Bart De Bruyn

Inhoudsopgave

Hoofdstuk

4 Voortbrengende functies

4.1 Formele machtreeksen

4.1.1 Inleiding

In paragraaf 2.10.2 hebben we als toepassing op de combinatieleer het binomium van Newton bewezen:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

of, in een enigszins aangepaste vorm

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Indien we de afspraak maken dat $\binom{n}{k}$ voor $k > n$ gelijk is aan nul, dan kunnen we dit binomium van Newton ook in de volgende vorm schrijven:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k.$$

De (oneindige) veelterm in x in het rechterlid wordt op die manier een *machtreeks in de onbepaalde variabele x*. We kunnen nu x als een symbool interpreteren en niet als één of ander getal uit een getallenstructuur zoals in de cursus analyse gebeurt. In dit geval zullen we ons niet meer moeten bekommeren om de convergentie van de machtreeks. Daarom wordt een reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

een *formele machtreeks* genoemd. De coëfficiënten a_k ($k \in \mathbb{N}$) behoren tot een bepaalde getallenverzameling, hier meestal tot $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{R}$.

Op die manier zal dus bij elke rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een formele machtreeks behoren. Omgekeerd bepalen de coëfficiënten van een formele machtreeks een rij getallen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Merk op dat elke veelterm

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

steeds als een formele machtreeks geschreven kan worden, mits de afspraak dat $a_m = 0$ voor $m > n$.

Opmerking

Wij hebben hier het woord *veeltermfunctie* vermeden omdat een functie (bijvoorbeeld van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$) vastgelegd wordt door haar waarden, terwijl de reeksen die wij beschouwen vastgelegd worden door de *coëfficiënten* a_n en door de *naam* van de onbepaalde variabele.

4.1.2 Som en product van formele machtreeksen

Definities

De rekenregels voor de formele machtreeksen zijn nagenoeg dezelfde als deze voor de veeltermen (zie Hoofdstuk 8). Zo zal de som en het product van formele machtreeksen op de volgende manier gedefinieerd worden:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k, \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k. \end{aligned}$$

Merk op dat de distributiviteitseigenschappen gelden voor deze optelling en vermenigvuldiging; meer bepaald krijgt de verzameling van formele machtreeksen in de variabele x op die manier de structuur van een *ring*; zie ook Hoofdstuk 8 verderop. We noteren deze ring als $\mathbb{Z}[[x]]$, $\mathbb{Q}[[x]]$ of $\mathbb{R}[[x]]$, afhankelijk van het feit of we coëfficiënten a_k in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{R}$ toelaten.

Eén van de grote voordelen van formele machtreeksen (in vergelijking met veeltermen) is dat er veel meer inverteerbare elementen bestaan.

Stelling 4.1.1. *Als*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \textit{en} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

twee formele machtreeksen zijn in $\mathbb{Q}[[x]]$ of $\mathbb{R}[[x]]$, met $b_0 \neq 0$, dan bestaat er een unieke formele machtreeks $h(x)$ zodat $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. We noteren $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ en noemen $h(x)$ het quotiënt *van $f(x)$ en $g(x)$. Meer bepaald is*

$$h(x) = \frac{1}{b_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{4.1}$$

waarbij de coëfficiënten c_k recursief gedefinieerd worden als $c_0 = a_0$ en

$$c_k = a_k - \frac{1}{b_0} \sum_{i=1}^{k} b_i c_{k-i} \quad \textit{voor alle } k \geq 1.$$

Bewijs. We zullen rechtstreeks berekenen dat de formele machtreeks $h(x)$ zoals gedefinieerd in vergelijking (4.1) voldoet aan $g(x) \cdot h(x) = f(x)$. Uit bovenstaande formule voor het product van machtreeksen vinden we dat

$$\begin{aligned}
g(x) \cdot h(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot \frac{1}{b_0} c_{k-i} \right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b_0} \sum_{i=0}^{k} b_i c_{k-i} \right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k + \frac{1}{b_0} \sum_{i=1}^{k} b_i c_{k-i} \right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x).
\end{aligned}$$

We tonen nu ook de uniciteit aan. Onderstel dat $h_1(x)$ en $h_2(x)$ twee verschillende machtreeksen zijn waarvoor $f(x) = g(x)h_1(x) = g(x)h_2(x)$. Dan geldt $g(x) \cdot (h_1(x) - h_2(x)) = 0$. Als $k \in \mathbb{N}$ het kleinste natuurlijk getal is waarvoor de coëfficiënt c'_k van x^k in $h_1(x) - h_2(x)$ verschillend is van nul, dan zal de coëfficiënt van x^k in $g(x) \cdot (h_1(x) - h_2(x))$ gelijk zijn aan $b_0 c'_k \neq 0$, wat een tegenstijdigheid is. Dit toont de uniciteit van $h(x)$ aan. $\square$

Toepassingen

We geven een aantal voorbeelden van bovenstaande stelling.

1. We kunnen bijvoorbeeld de volgende bewerkingen uitvoeren.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) (1 - x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} x^k = 1.$$

Aangezien nu x een onbepaalde variabele is, kunnen we schrijven dat

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Vervangen we nu de onbepaalde variabele x door $-x$, dan ontstaat de betrekking

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots .\end{aligned}$$

(We hadden deze uitdrukkingen ook kunnen berekenen met behulp van de formule (4.1).)

2. We zoeken een uitdrukking voor

$$\frac{1}{1-x-x^2}.$$

We passen hiervoor de formule (4.1) toe, met $f(x) = 1$ en $g(x) = 1 - x - x^2$. Merk op dat $a_i = 0$ voor alle $i \geq 1$ en dat $b_0 = 1$. We vinden dat

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

met $c_0 = 1$ en

$$c_k = -\sum_{i=1}^{k} b_i c_{k-i}$$

voor alle $k \geq 1$. Voor $k = 1$ geeft dit $c_1 = -b_1 c_0 = 1$; voor $k \geq 2$ vinden we $c_k = c_{k-1} + c_{k-2}$. Uiteindelijk vinden we dus dat

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \cdots$$

Merk terloops op dat

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k(1+x)^k$$

en dat de coëfficiënten van x in $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots$ gelijk zijn aan $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$; deze getallen vormen een bekende rij, namelijk de rij van Fibonacci (zie pagina 99). We zullen dit verband later kunnen verklaren; zie Stelling 5.3.1 op p. 111.

3. Aangezien
$$(1-x^m)(1+x+x^2+\cdots) = 1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*,$$
geldt
$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \left(\sum_{k=0}^{m-1} x^k\right)(1-x^m)^{-1} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Opmerking

In de vorige paragraaf hebben we een substitutie doorgevoerd door x te vervangen door $-x$. Willen we echter dit procédé algemeen toepassen, dan moeten we wel opletten.

Veronderstel dat we bijvoorbeeld in de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ de onbepaalde variabele vervangen door $1+x$. Dan verkrijgen we
$$\sum_{k=0}^{\infty}(1+x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^l\right).$$
Geen enkel van de coëfficiënten van machten van x in deze nieuwe reeks kan nog bepaald worden. Dit probleem zal zich niet voordoen indien we x vervangen door een formele machtreeks zonder constante term. We spreken dan ook in het vervolg af, dat we nooit substituties zullen uitvoeren waar x vervangen wordt door een machtreeks met een constante term verschillend van nul. Merk bovendien op dat we de onbepaalde variabele x niet zo maar mogen vervangen door een willekeurig getal, want dan komen we terug op het domein van de analyse, en moet er eerst een convergentie-onderzoek aan voorafgaan. Zo weten we bijvoorbeeld dat over de reëele getallenverzameling $\mathbb{R}$, de reeks $\sum x^k$ enkel convergent is als $x \in]-1,+1[$.

Oefeningen

1. Bepaal $g(x)$, zodanig dat $g(x)(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots) = 1$.
2. Bepaal de coëfficiënt van x^7 in de ontwikkeling van $(1+x+x^2)^{-1}$.
3. Bestaat er voor de volgende formele machtreeksen $f(x)$ en $g(x)$ een formele machtreeks $h(x)$ zodat $f(x) = g(x)\cdot h(x)$. Beantwoord deze vraag voor elk van de volgende gevallen:
   - $f(x) = 1+x$ en $g(x) = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots$
   - $f(x) = x+x^2+x^3$ en $g(x) = 4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+\cdots$
   - $f(x) = x^4+x^5+x^6+x^7+\cdots$ en $g(x) = 2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+\cdots$

4.2 Gewone voortbrengende functies

4.2.1 Definities en voorbeelden

Veronderstel dat een rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeven wordt. Elke uitdrukking $g(x)$ die gelijk is aan de formele machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ horend bij de rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wordt een *(gewone) voortbrengende functie* van deze rij genoemd (al is het geen functie in de stricte betekenis van het woord).

Voorbeelden

1. De voortbrengende functie van de rij $(1, -1, 1, -1, \ldots)$ is
$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots .$$
2. De voortbrengende functie van de rij $(1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ is
$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots .$$
3. $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$ is de voortbrengende functie van de rij van de combinaties zonder herhaling van k elementen uit n elementen (vaste n en variabele k).

In de praktijk zullen de elementen van de rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ het aantal oplossingen van een combinatorisch probleem (met andere woorden van één of andere telling) voorstellen. In Hoofdstuk 2 hebben we reeds heel wat telmethodes gezien. Soms zijn deze telmethodes zeer omslachtig of vragen ze veel rekenwerk. Zo komt het bij heel wat verdelingsproblemen voor, dat we een aantal elementen in groepjes willen splitsen waarbij we extra voorwaarden opleggen, bijvoorbeeld dat de groepjes minstens een aantal elementen van een bepaalde soort moeten bevatten, of dat elke groep een even aantal elementen moet bevatten. Dergelijke problemen zijn niet altijd eenvoudig op te lossen met de klassieke methodes. Hier komt de methode van de voortbrengende functies echter goed van pas.

Definitie

- Bij een *telprobleem van type A* worden natuurlijke getallen gecreëerd als uitkomst van een bepaald expirement of keuze (zoals gooien van een dobbelsteen) en is men geïnteresseerd in het aantal manieren waarop elk natuurlijk getal kan voorkomen als zo'n uitkomst.

- De *voortbrengende functie van een telprobleem van type A* is de voortbrengende functie van de rij $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, waarbij elke a_i gelijk is aan het aantal manieren waarop uitkomst i kan voorkomen; het is dus de formele machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

- De *samenvoeging van twee telproblemen van type A* is het telprobleem van type A waarbij we beide expirementen/keuzes naast elkaar uitvoeren, en dat als resultaat de som neemt van beide bekomen uitkomsten. Zo is de samenvoeging van "het aantal ogen bij het gooien met een dobbelsteen" en "het aantal ogen bij het gooien met een (andere) dobbelsteen" gelijk aan "het totaal aantal ogen bij het gooien van twee dobbelstenen".

De kracht van voortbrengende functies zit hem in de volgende stelling.

Stelling 4.2.1. *Beschouw twee telproblemen van type A, met corresponderende voortbrengende functies gelijk aan* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *en* $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. *Dan is de voortbrengende functie van de samenvoeging van deze twee telproblemen gelijk aan* $h(x) = f(x)g(x)$.

Bewijs. Zij $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ de voortbrengende functie van de samenvoeging van de twee gegeven telproblemen. Voor elke $k \in \mathbb{N}$ is dan c_k gelijk aan het aantal manieren waarop de som van de twee uitkomsten gelijk kan zijn aan k. De mogelijke manieren om de som k te bekomen zijn:

- uitkomst 0 voor het eerste telprobleem en uitkomst k voor het tweede telprobleem;

- uitkomst 1 voor het eerste telprobleem en uitkomst $k-1$ voor het tweede telprobleem;

- uitkomst 2 voor het eerste telprobleem en uitkomst $k-2$ voor het tweede telprobleem;

- ...

- uitkomst k voor het eerste telprobleem en uitkomst 0 voor het tweede telprobleem.

We zien dus dat

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Uit de definitie van het product van twee formele machtreeksen zien we dat dit precies betekent dat $h(x) = f(x)g(x)$. $\square$

We zullen deze stelling aan de hand van enkele voorbeelden illustreren.

1. *Op hoeveel manieren kunnen we met twee dobbelstenen* 5 *ogen gooien?*

   Oplossing.

   Dit is een eenvoudig vraagstuk. We vragen eigenlijk op hoeveel manieren we 5 kunnen schrijven als een som van twee getallen uit $\mathbb{N}[1,6]$ (in feite zouden we ons kunnen beperken tot $\mathbb{N}[1,4]$). We kunnen dit probleem uiteraard eenvoudig oplossen zonder gebruik te maken van voortbrengende functies, maar we gebruiken dit eenvoudig voorbeeld om de nieuwe methode te illustreren. Het probleem kan opgevat worden als een telprobleem van type A dat de samenvoeging is van twee telproblemen van type A. Bij deze twee telproblemen van type A is de uitkomst telkens gelijk aan het aantal ogen dat men bekomt bij het gooien van een bepaalde dobbelsteen. Met één dobbelsteen kunnen we $1,2,3,4,5$ of 6 gooien, en elk van deze mogelijkheden komt één keer voor. Deze informatie kunnen we opslaan in de rij

   $$(0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,\dots)$$

   of dus in de formele machtreeks

   $$f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\,.$$

   Met de tweede dobbelsteen correspondeert eenzelfde machtreeks. Het aantal keren dat we met de twee dobbelstenen samen 5 ogen gooien, zullen we vinden als coëfficiënt van x^5 in het product van beide machtreeksen, dus in

   $$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2.$$

   Alhoewel dit een eenvoudig vraagstuk was, kunnen we hieruit reeds een belangrijk voordeel op de klassieke methode opmerken. Inderdaad, we hebben hier een globale oplossing; we kunnen zonder meer de vraag beantwoorden voor elk aantal ogen gelegen tussen 1 en 12, want

   $$\begin{aligned}(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 = {} & x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 \\ & + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}.\end{aligned}$$

2. *Zoek het aantal drietallen a,b,c in $\mathbb{N}[2,4]$ waarvoor $a+b+c=10$.*

Oplossing. Aangezien er duidelijk niet zo veel oplossingen kunnen zijn voor dit probleem, zullen we deze in een tabel onderbrengen.

a	b	c
2	4	4
4	2	4
4	4	2
3	3	4
3	4	3
4	3	3

Er zijn dus bijgevolg 6 oplossingen.

We willen dit probleem nu oplossen met behulp van voortbrengende functies; we "vertalen" het daarom eerst naar een telprobleem van type A dat we kunnen zien als de samenvoeging van drie andere (bijna triviale) telproblemen van type A. Het eerste telprobleem van type A correspondeert met de keuze van het getal a, en heeft als mogelijke uitkomsten enkel de waarden 2, 3, of 4, die elk één keer voorkomen. Hiermee correspondeert dus de formele machtreeks

$$p_a(x) = x^2 + x^3 + x^4 .$$

Op analoge wijze zal met de keuzes van de getallen b en c de formele machtreeksen $p_b(x) = x^2+x^3+x^4$ en $p_c(x) = x^2+x^3+x^4$ corresponderen. De veelterm $p(x) = p_a(x) \cdot p_b(x) \cdot p_c(x)$ is een veelterm van de graad 12 waarbij de laagst voorkomende macht van x gelijk is aan 6. Bovendien is de coëfficiënt van x^i gelijk aan het aantal oplossingen van $a+b+c = i$. Het probleem is op die manier herleid tot het bepalen van de coëfficiënt van x^{10} in $p(x) = (x^2 + x^3 + x^4)^3$ of van x^4 in $g(x) = (1 + x + x^2)^3$. Alhoewel de uitwerking van $g(x)$ in dit geval geen enkel probleem met zich meebrengt, zullen we gebruik maken van de multinomiaalstelling om de coëfficiënt te berekenen.

Volgens deze stelling is

$$\begin{aligned} g(x) &= (1 + x + x^2)^3 \\ &= \sum \binom{3}{(3-n_1-n_2), n_1, n_2} x^{n_1} (x^2)^{n_2} , \end{aligned}$$

waarbij de som genomen wordt over alle koppels (n_1, n_2) uit $\mathbb{N}[0,3] \times \mathbb{N}[0,3]$ zodanig dat $n_1 + n_2 \leq 3$. De coëfficiënt van x^4 in $g(x)$ is dus gelijk aan

$$\binom{3}{0,2,1} + \binom{3}{1,0,2} = \frac{3!}{0!\,2!\,1!} + \frac{3!}{1!\,0!\,2!} = 6 .$$

Merk op dat $p(x)$ de voortbrengende functie is van het aantal combinaties met herhaling van k elementen uit 3 elementen met de bijkomende eigenschap dat elk element ten minste 2 maal en ten hoogste 4 maal voorkomt. Voor elke k vinden we dit aantal combinaties als coëfficiënt van x^k in $p(x)$. Uitgewerkt ziet $p(x)$ er als volgt uit:

$$p(x) = x^6 + 3x^7 + 6x^8 + 7x^9 + 6x^{10} + 3x^{11} + x^{12}.$$

Dit geeft ons dan ook een eerste voorbeeld van een combinatorisch probleem dat met de traditionele teltechnieken niet zo eenvoudig op te lossen is.

Zo zal de voortbrengende functie voor de combinaties van 4 letters, waarbij 1 letter tot 4 keer herhaald mag worden, een andere tot 2 keer toe en de overige 2 hoogstens 1 keer, gegeven worden door

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x).$$

Het aantal manieren waarop men uit een verzameling knikkers van 3 verschillende kleuren, rood, groen en geel, er r kan uitnemen zodanig dat er ten hoogste 2 rode knikkers, ten hoogste 3 groene knikkers en ten hoogste 4 gele knikkers werden genomen, kan men vinden door de coëfficiënt van x^r te bepalen in de voortbrengende functie

$$g(x) = (1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4).$$

Hierbij gaat men ervan uit dat de knikkers enkel te onderscheiden zijn door hun kleur. De coëfficiënt van x^r in $g(x)$ is het aantal oplossingen in $\mathbb{N}$ van $a + b + c = r$, waarbij $a \leq 2,\ b \leq 3,\ c \leq 4$.

3. *Bepaal de voortbrengende functie $g(x)$ van de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, waarbij a_n het aantal oplossingen is in $\mathbb{N}$ van de vergelijking $2u + 3v + 5w = n$.*

   Oplossing. Het probleem kan opgevat worden als een telprobleem van type A dat de samenvoeging is van drie telproblemen van type A. Het eerste telprobleem van type A heeft als uitkomst de waarde $2u$ waarbij u een bepaalde keuze uit $\mathbb{N}$ voorstelt. Aangezien $2u \in \{0, 2, 4, 6, \dots\}$, kunnen we hiermee de rij $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ laten corresponderen, zodat de bijhorende voortbrengende functie gelijk is aan $p_u(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)$. Het tweede telprobleem van type A heeft als uitkomst de waarde $3v$ waarbij v een bepaalde keuze uit $\mathbb{N}$ voorstelt, en het derde telprobleem van type A heeft als uitkomst $5w$ waarbij w een bepaalde keuze uit $\mathbb{N}$ voorstelt. Aangezien

$3v \in \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$ en $5w \in \{0, 5, 10, 15, \ldots\}$, zullen de voortbrengende functies van twee laatstgenoemde telproblemen respectievelijk gelijk zijn aan $p_v(x) = (1+x^3+x^6+x^9+\cdots)$ en $p_w(x) = (1+x^5+x^{10}+\cdots)$. De voortbrengende functie van de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bijgevolg

$$\begin{aligned} g(x) &= p_u(x) \cdot p_v(x) \cdot p_w(x) \\ &= (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots) \\ &\qquad \cdot (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots) \\ &= \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}. \end{aligned}$$

4.2.2 De voortbrengende functie voor de herhalingscombinaties

Zoals gezegd is $(1 + x)^n$ de gewone voortbrengende functie voor de combinaties zonder herhaling van n elementen. De volgende stelling geeft de voortbrengende functie van de combinaties met herhaling.

Stelling 4.2.2. *$(1-x)^{-n}$ is de voortbrengende functie van de rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ met*

$$a_k = \overline{\binom{n}{k}} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Met andere woorden:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

Bewijs. De voortbrengende functie die het aantal herhalingscombinaties weergeeft is

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n.$$

Inderdaad, de coëfficiënt van x^k geeft het aantal manieren waarop men x^k bekomt als product van n factoren van de vorm x^{k_i} met $\sum_{i=1}^n k_i = k$. Het is met andere woorden het aantal manieren waarop k geschreven kan worden als de som van n getallen uit $\mathbb{N}[0, k]$. Dit is de definitie (zie paragraaf 2.9.4) van de herhalingscombinatie

$$\overline{\binom{n}{k}} = \binom{n+k-1}{k}.$$

We kunnen dus schrijven

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k. \qquad \square$$

Toepassing

Zoek het aantal oplossingen in $\mathbb{N}[3,8]$ *van de vergelijking* $a+b+c+d=27$.

Oplossing.
Het aantal oplossingen is de coëfficiënt van x^{27} in

$$g(x) = (x^3 + x^4 + \cdots + x^8)^4,$$

dit is ook de coëfficiënt van x^{15} in

$$h(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^5)^4.$$

We hebben reeds vroeger gezien dat deze coëfficiënt door middel van de multinomiaalstelling kan worden gevonden. We geven hier een andere methode, die voor elk analoog vraagstuk toegepast kan worden.

Merk op dat

$$h(x) = (1 - x^6)^4 (1 + x + x^2 + \cdots)^4.$$

Nu is

$$(1 - x^6)^4 = 1 - \binom{4}{1} x^6 + \binom{4}{2} x^{12} + \cdots\,,$$

(vervang hiervoor in het binomium van Newton voor $(1+t)^4$, de variabele t door $-x^6$). Anderzijds is (zie Stelling 4.2.2)

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^4 = \binom{3}{0} + \binom{4}{1} x + \binom{5}{2} x^2 + \binom{6}{3} x^3 + \cdots\,.$$

Bijgevolg is de coëfficiënt van x^{15} in $h(x)$ gelijk aan

$$\begin{aligned}
\binom{18}{15} - \binom{4}{1}\binom{12}{9} + \binom{4}{2}\binom{6}{3} &= \frac{18!}{15!3!} - 4\frac{12!}{9!3!} + 6\frac{6!}{3!3!} \\
&= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{6} - 4\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} + 6\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} \\
&= 816 - 880 + 120 \\
&= 56\,.
\end{aligned}$$

De vergelijking $a+b+c+d=27$ bezit dus 56 oplossingen in $\mathbb{N}[3,8]$.

4.2.3 Het aantal partities van een natuurlijk getal

Veronderstel dat we 4 gelijke knikkers bezitten, dan is het vlug in te zien dat er 5 verschillende manieren zijn om deze knikkers in porties te verdelen, namelijk gaande van 1 portie met 4 knikkers, 2 porties met resp. 3 en 1 knikker, 2 porties met elk 2 knikkers, 3 porties waarvan 1 met 2 knikkers en de andere 2 met elk 1 knikker tot tenslotte 4 porties met elk 1 knikker. Het zal duidelijk zijn dat voor grotere n deze aantallen vlug oplopen.

We noteren met p_n het aantal manieren waarop we een getal n in kleinere delen, verschillend van nul, kunnen verdelen. We noemen dit het *aantal partities* van n (niet te verwarren met de partities van een verzameling waar de elementen die tot een deelverzameling behoren mede bepalend zijn voor de partitie).

Zoals we zullen zien, is een eenvoudige formule voor de waarde van p_n moeilijk te geven. We kunnen wel de voortbrengende functie, behorend bij p_n opstellen.

Merk echter wel op dat het bepalen van p_n niet hetzelfde is als het bepalen van het aantal oplossingen van de vergelijking $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ voor alle mogelijke k met $1 \leq k \leq n$. Inderdaad, de oplossingen $x_1 = 2, x_2 = 3$ en $x_1 = 3, x_2 = 2$ zijn 2 verschillende oplossingen van de vergelijking $x_1 + x_2 = 5$, maar ze definiëren éénzelfde partitie van het getal 5.

Stelling 4.2.3. *Zij p_n het aantal partities van het getal n. Dan geldt*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\cdots\end{aligned}$$

Bewijs. Als in een partitie van n het aantal delen van grootte i gelijk is aan x_i, dan geldt de volgende gelijkheid.

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + \cdots + n \cdot x_n = n\,.$$

Mits de afspraak dat $x_i = 0$ als $i > n$ kunnen we dit ook schrijven als

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x_k = n\,.$$

We proberen nu een formele machtreeks op te stellen voor het aantal oplossingen van deze vergelijking. De gevolgde werkwijze is analoog aan deze van het laatste voorbeeld van paragraaf 4.2.1.

Als $x_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots$ dan draagt de eerste term ook $0, 1, 2, 3, \ldots$ bij tot de som. Daarom geldt voor x_1 de formele machtreeks

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Als $x_2 = 0, 1, 2, 3, \ldots$ dan draagt de tweede term $0, 2, 4, 6, \ldots$ bij tot de som. Daarom geldt voor x_2 de formele machtreeks

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Op die manier geldt voor x_i de formele machtreeks

$$1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{ik} = \frac{1}{1-x^i}.$$

Vermenigvuldigen we nu al deze machtreeksen met elkaar, dan resulteert dit in de machtreeks waarvan de coëfficiënt van x^n gelijk is aan het aantal partities p_n van n. $\square$

Opmerking

Ter illustratie geven we hier een beperkte lijst van waarden van p_n. Het *efficiënt* berekenen van p_n (voor grote waarden van n) is overigens een zeer uitdagend probleem, waar bijzonder ingenieuze algoritmen voor ontwikkeld werden.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
p_n	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	627	204226	190569292

4.3 Exponentieel voortbrengende functies

Het binomium van Newton leidt tot de gewone voortbrengende functie voor de rij van de combinaties (zowel met als zonder herhaling).

Merk nu echter op dat

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_n^k}{k!} x^k,\end{aligned}$$

waarbij $V_n^k = 0$ als $k > n$. In plaats van nu de formele machtreeksen met coëfficiënten a_k te gebruiken als voortbrengende functie van een rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, kunnen we nu ook de formele machtreeksen met coëfficiënten $a_k/k!$ gebruiken. We spreken in dit geval van de *exponentieel voortbrengende functie*.

Met andere woorden, $g(x)$ is de exponentieel voortbrengende functie van de rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dan en slechts dan als

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

Bijgevolg is $(1+x)^n$ de exponentieel voortbrengende functie van de variaties van k elementen uit n elementen (onderstellend dat zo'n variatie gelijk is aan 0 als $k > n$).

De exponentieel voortbrengende functie van de rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeven door $a_k = 1$ voor alle $k \in \mathbb{N}$, is

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x^1 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k.$$

Deze reeks is zeer gekend in de analyse. Inderdaad, indien we het als een functie over $\mathbb{R}$ opvatten, is het niets anders dan de reeksontwikkeling van de exponentiële functie e^x. Vandaar de naam: exponentieel voortbrengende functie. We definiëren dan ook de *formele exponentiële functie* e^x op de volgende manier:

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k.$$

We kunnen niet genoeg herhalen dat de term "functie" slecht gekozen is, aangezien x ook hier een onbepaalde variabele is. Nochtans, vele van de rekenregels uit de analyse de we kennen voor de exponentiële functie blijven ook hier geldig. Zo zal bijvoorbeeld $(e^x)^n = e^{nx}$ en $(e^x)^{-n} = e^{-nx}$ voor alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Net zoals de gewone voortbrengende functies hun nut bewijzen bij het beschouwen van de samenvoeging van telproblemen van type A, zo spelen de exponentieel voortbrengende functies een belangrijke rol bij het samenvoegen van telproblemen van type B.

Definitie

- Bij een *telprobleem van type B* worden door middel van expirementen of keuzes rijen gegenereerd bestaande uit bepaalde objecten (zoals cijfers) en is men geïnteresseerd in het aantal rijen van een bepaalde lengte die men op deze wijze kan bekomen.

- De *exponentieel voortbrengende functie van een telprobleem van type B* is de exponentieel voortbrengende functie van de rij $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, waarbij elke a_i gelijk is aan het aantal geordende rijen van lengte i die kunnen bekomen worden via het expirement of keuze; het is dus de formele machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$.

- het *samenvoegen van twee telproblemen van type B* is het telprobleem van type B waarbij we beide gegeven expirementen/keuzes naast elkaar[1] uitvoeren, en vervolgens de bekomen rijen "in elkaar schuiven" op een willekeurige manier, d.w.z. dat de nieuwe rij ontstaat door de rijen van beide expirementen/keuzes samen te voegen, zonder echter de onderlinge volgorde van de elementen van elk van de rijen te wijzigen. Zo is het samenvoegen van "woorden bestaande uit 4 of 5 letters" en "getallen bestaande uit 2 of 3 cijfers" gelijk aan "strings bestaande uit 4 of 5 letters en 2 of 3 cijfers".

De volgende stelling speelt een gelijkaardige rol als Stelling 4.2.1.

Stelling 4.3.1. *Beschouw twee telproblemen van type B, met corresponderende exponentieel voortbrengende functies gelijk aan*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \quad \textit{en} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}.$$

Dan is de exponentieel voortbrengende functie van het samenvoegen van deze twee telproblemen gelijk aan $h(x) = f(x)g(x)$.

Bewijs. Zij $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!}$ de exponentieel voortbrengende functie van het samenvoegen van de twee gegeven telproblemen van type B. Voor elke $k \in \mathbb{N}$ is dan c_k gelijk aan het aantal rijen van lengte k die kunnen bekomen worden. De mogelijke manieren om zo'n rij te verkrijgen, zijn:

- het samenvoegen van een rij van lengte 0 uit het eerste probleem en een rij van lengte k uit het tweede probleem;

- het samenvoegen van een rij van lengte 1 uit het eerste probleem en een rij van lengte $k-1$ uit het tweede probleem;

[1] We benadrukken dat we in de nieuwe rij het onderscheid blijven maken tussen elementen afkomstig van het eerste probleem en elementen afkomstig van het tweede probleem, ook al zouden die toevallig op de zelfde manier neergeschreven worden.

- ...
- het samenvoegen van een rij van lengte k uit het eerste probleem en een rij van lengte 0 uit het tweede probleem.

Merk bovendien op dat het samenvoegen van een rij van lengte i uit het eerste probleem en een rij van lengte $k-i$ uit het tweede probleem op precies $\binom{k}{i}$ manieren kan. Bijgevolg is

$$c_k = \binom{k}{0} a_0 b_k + \binom{k}{1} a_1 b_{k-1} + \cdots + \binom{k}{k} a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i b_{k-i}.$$

Anderzijds zien we dat het product $f(x)g(x)$ gelijk is aan

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{i!} \cdot \frac{b_{k-i}}{(k-i)!} \right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!\,(k-i)!} \cdot a_i b_{k-i} \right) \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i b_{k-i} \right) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!} = h(x)\,. \end{aligned}$$ □

Voorbeelden

1. *Op hoeveel manieren kan men met de cijfers* 1, 2, 3 *getallen van* 5 *cijfers maken, zodanig dat elk getal ten minste* 3 *verschillende cijfers bevat?*

   Oplossing.

   Dit is in feite een rechtstreekse toepassing op de definitie van de multinomiaalgetallen. Inderdaad, het aantal getallen met 5 cijfers waarin het cijfer 1 en het cijfer 2 elk twee maal voorkomen (en dus het cijfer 3 één keer) is gelijk aan

   $$\frac{5!}{2!\,2!\,1!}.$$

   Het totaal aantal getallen dat aan de voorwaarden voldoet is gelijk aan

   $$\sum \frac{5!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} \quad \text{met } n_i \in \mathbb{N}[1,3] \text{ en } n_1 + n_2 + n_3 = 5,$$

en na enig rekenwerk vind je 150.

We willen dit probleem nu oplossen door gebruik te maken van de exponentieel voortbrengende functies. Merk op dat in elk van de getallen een cijfer $a \in \{1, 2, 3\}$ één maal, twee maal of drie maal voorkomt. We kunnen het gegeven combinatorisch probleem dus zien als een telprobleem van type B dat bekomen wordt door het samenvoegen van drie telproblemen van type B, waarbij elk van deze telproblemen met een ander cijfer overeenkomt. Zo heeft het telprobleem van type B dat met het cijfer 1 overeenkomt, slechts drie mogelijke uitkomsten, namelijk "1", "11" en "111"; we hebben dus één rij van elk van de lengtes 1, 2 of 3 (en geen rijen van andere lengtes). De overeenkomstige exponentieel voortbrengende functie is dus

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\,.$$

De voortbrengende functie die bij het samenvoegen van deze drie telproblemen van type B hoort, is dan

$$g(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)^3.$$

Het aantal getallen met 5 cijfers zodanig dat elk van de cijfers 1, 2 of 3 ten minste één maal voorkomt is dan af te lezen als coëfficiënt van $x^5/5!$ in $g(x)$.

Een alternatieve manier om deze coëfficiënt te vinden gaat als volgt. Merk op dat de coëfficiënt van $x^5/5!$ niet wijzigt indien we als voortbrengende functie

$$g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)^3$$

nemen. Nu is

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

zodat

$$g(x) = (e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1.$$

De coëfficiënt van $x^5/5!$ hierin, is uiteraard $3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 = 150$.

2. *We herhalen het vorige vraagstuk, waarbij we nu bovendien onderstellen dat de cijfers* 2 *en* 3 *elk ten hoogste* 2 *maal mogen voorkomen.*

Oplossing.

Het is duidelijk dat de bijhorende exponentieel voortbrengende functie er nu als volgt uitziet:

$$g(x) = (e^x - 1)\left(x + \frac{x^2}{2!}\right)^2.$$

Bepaal zelf de coëfficiënt van $x^5/5!$.

Oefeningen

1. Stel $n, k \in \mathbb{N}^*$ met $n \geq k$. Bewijs dat $(k!) \cdot S(n, k)$ de coëfficiënt is van $x^n/n!$ in $(e^x - 1)^k$. Hierbij is $S(n, k)$ het Stirling getal van de tweede soort (zie paragraaf 2.11).

2. Bepaal de exponentieel voortbrengende functie die behoort bij het bepalen van het aantal woorden (eventueel zonder betekenis) die men kan maken met de letters van het woord MISSISSIPPI, waarbij elke letter ten hoogste zoveel keer mag voorkomen in de gemaakte woorden als in het woord MISSISSIPPI zelf.

3. Op hoeveel manieren kan men 9 personen plaatsen in 4 kamers, zodanig dat geen enkele kamer onbezet is?